С.С. Герштейн, А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили

Некоторые результаты релятивисткой теории гравитации (РТГ)

I. Эволюция Вселенной

II. Излучение гравитационных волн

Протвино, 22.12.2008

В основе **ОТО** лежит принцип эквивалентности:

Гравитационное поле описывается метрическим тензором Риманова пространства (геометрическая теория).

В основе **РТГ**:

Гравитация описывается физическим полем, источником которого является сохраняющийся в пространстве Минковского полный тензор энергии-импульса (включающий гравитационное поле).

Главная мотивация:

существование независимых законов сохранения: энергии, импульса, момента.

Исходное уравнение:

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \phi^{\mu\nu} + m^2 \phi^{\mu\nu} = 16\pi t^{\mu\nu}$$

($G = 1, \hbar = 1, c = 1$). Произвольная система координат пространства Минковского.

$$t^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}$$

Следствия выбора в качестве источника сохраняющегося тензора $t^{\mu\nu}$:

(1) Гравитационное поле описывается симметричным тензором 2-ого ранга.

(2) Активная гравитационная масса равна инертной.

(3) В силу универсальности возможна геометризация теории: описание движения вещества в эффективном Римановом пространстве.

Доказано, что

$$L_M \;\; = \;\; L_M(g_{\mu\nu}, \Phi_A)$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu},$$
$$\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu};\ \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu};\ \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}.$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{m_g^2}{2}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \qquad (*).$$

$R_{\mu\nu}$ - калибровочно-инвариантная конструкция. Из уравнения для вещества:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

при $m_g \neq 0$ следует

$$D_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0 \quad (**)$$

$(*)$ и $(**)$ - полная система уравнений.

Вопрос о космологической постоянной:

без вещества $\to$ Риманово пространство переходит в пространство Минковского.

Вселенная и ее эволюция

Для однородной и изотропной Вселенной в эффективном Римановом пространстве

$$ds^2 = c^2 U(t) dt^2 - V(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

здесь $k = \pm 1, 0$. В пространстве Минковского:

$$d\sigma^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Уравнения $D_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0$ дают:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V}{U^{1/3}} \right) = 0 \rightarrow \frac{V}{U^{1/3}} = const = \beta^4$$

$$-\frac{d}{dr} \left[(1 - kr^2)^{1/2} r^2 \right] + 2(1 - kr^2)^{-1/2} = 0 \rightarrow k = 0.$$

т.е. <u>**ВСЕЛЕННАЯ- ПЛОСКАЯ**</u> ($k = 0$).

Полагая

$$U^{1/3} = a^2, \;\; d\tau = a^3 dt,$$

имеем:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 - \beta^4 a^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) \\ d\sigma^2 &= \frac{c^2}{a^6} d\tau^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned}$$

Для масштабного фактора:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}\frac{d^2 a}{d\tau^2}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{1}{12} m^2 \left(2 - \frac{3}{a^2\beta^4} + \frac{1}{a^6}\right) \\ \frac{1}{a}\frac{d^2 a}{d\tau^2} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho - \frac{3p}{c^2}\right) - \frac{1}{6} m^2 \left(1 - \frac{1}{a^6}\right) \\ m &= \frac{m_g c}{\hbar} \end{aligned}$$

$m \neq 0$ меняет характер эволюции при $a \to 0$ и $a \to \infty$. Изменение хода инерциального времени в гравитационном поле приводит к силам отталкивания при $a \ll 1$ и к силам притяжения на конечной стадии расширения при $a \gg 1$.

а) Отсутствие космологической особенности

Радиационно доминантная стадия: $\rho \sim 1/a^4$ при $a \ll 1$:

$$a_{min} = \left(\frac{m^2}{32stG\rho_{max}}\right)^{1/6}$$

где ρ_{max} - параметр теории.

$a_{min} \simeq 5 \cdot 10^{-11}$ - на электрослабой шкале

$a_{min} \simeq 5 \cdot 10^{-19}$ - на шкале Великого объединения

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\frac{d^2a}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0} &= \frac{8\pi G}{3}\rho_{max} > 0 \to \text{ отталкивание} \\ R|_{\tau=0} &= -\frac{16\pi G}{3}\rho_{max} \to \text{ "упругость"поля}\end{aligned}$$

Эволюция ранней Вселенной

$$a(\tau) \simeq a_{min}[1 + \frac{1}{2}(\frac{\tau}{\tau_2}^2)]$$

$$\tau_2 = (\frac{3}{8\pi G\rho_{max}})^{1/2}$$

Горизонт:

$$R(\tau) \simeq c\tau(1 + \frac{1}{3}\frac{\tau^2}{\tau_2^2})$$

При $\tau >> \tau_2$ выход на фридмановский режим:

$$\rho \simeq \rho_r(\tau) = \frac{3}{32\pi G\tau^2}$$

б) Невозможность неограниченного расширения

Принцип причинности: при $ds^2 = 0 \rightarrow d\sigma^2 \geq 0$

$$d\sigma^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{a^4}{\beta^4}\right) \geq 0, \quad a_{max} = \beta$$

β - определяется нтегралом движения.

Несовместимость РТГ с постоянным космологическим членом (ΛCDM).

Квинтэссенция: $P_q = -(1-\nu)\epsilon_q, \quad 0 \leq \nu \leq 2/3$

в) Полная относительная плотность вещества

$$
\begin{aligned}
1 &= \Omega_{tot}^0 - \frac{f^2}{6}, \\
f &= \frac{m_g c^2}{\hbar H} \qquad\qquad \frac{1}{\hbar H} \text{ очень велико} \\
\Omega_{tot}^0 &= 1 + \frac{f^2}{6}
\end{aligned}
$$

Необходимость "темной" материи (А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили (1984))

г) Верхний предел на массу гравитона

"Хаббловская масса":

$$\begin{aligned}
m_H &= \frac{\hbar H}{c^2} = 3.8 \cdot 10^{-66} h \quad (h = 0.7) \\
\Omega^0_{tot} &= 1.095^{+0.094}_{-0.144} \quad \Omega^0_{tot} = 1.086^{+0.057}_{-0.128} \\
\frac{f^2}{6} &\simeq 0.3 \\
m_g &\leq 1.3 \cdot m_H \simeq 3.6 \cdot 10^{-66} \\
\frac{\hbar}{m_g c} &\leq 0.75 \frac{c}{H} \\
\Omega^0_{tot} &= 1.02 \pm 0.02 \ ?
\end{aligned}$$

Последняя обработка данных WMAP:

[astro-ph.0603449]:

Наилучший фит достигается при анализе данных одного только WMAP: $\Omega_m = 0.415$ и $\Omega_\Lambda = 0.630$, то есть $\Omega_{total} = 1.045$.

д) Упругость гравитационного поля

$$\begin{aligned}
\frac{d^2a}{d\tau^2} + \frac{dV}{da} &= 0 \\
V &= -\frac{8\pi G}{3}a^2\rho + \frac{m^2}{12}\left(a^2 + \frac{1}{2a^4}\right)
\end{aligned}$$

Аналог энергии:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\frac{da}{d\tau})^2 + V &= E = const \\
E &= \frac{1}{2}(\frac{da}{d\tau})^2 - \frac{8\pi G}{3}a^2\rho + \frac{m^2}{12}\left(a^2 + \frac{1}{2a^4}\right).
\end{aligned}$$

$$E = \frac{(mc)^2}{8\beta^4} \quad \beta = a_{max}$$

e) Осциллирующий характер эволюции Вселенной

(R.C. Tolman (1934))

$\Omega_{tot}^0 = 1 + \frac{f^2}{6}$

Квинтэссенция:

$$p_q = \omega \epsilon_q \quad \omega = -(1 - \nu).$$

Начало ускоренного расширения τ_1.

Окончание ускоренного расширения τ_2.

Полупериод осцилляции τ_{max}.

Время начала ускоренного расширения Вселенной τ_1, его окончания τ_2 и время максимального расширения (полупериод осцилляции) τ_{max} (млрд. лет).

ν	τ_1	τ_2	τ_{max}
$\nu = 0.05$	7.0-8.2	980-1080	1220-1360
$\nu = 0.10$	7.0-8.2	440-485	620-685
$\nu = 0.15$	7.1-8.3	275-295	430-460
$\nu = 0.20$	7.1-8.3	190-205	325-347
$\nu = 0.25$	7.2-8.5	142-149	263-280
$\nu = 0.30$	7.5-8.7	109-113	227-235

Минимальная плотность в максимуме расширения

$$\frac{\rho_{min}}{\rho_c} = \frac{f^2}{6} = \Omega_{tot}^0 - 1$$

Необходимо подождать до получения более точных экспериментальных данных о Ω_{tot}^0!

II. Гравитационное излучение в РТГ

Введение массы гравитона в линеризированной теории гравитации вызывает трудности:

1. Если спин гравитона $S = 2$ — не получается правильное описание гравитационных явлений в Солнечной системе

2. Добавлением состояние $S = 0$ можно добиться правильного описания явлений.

   Но появляются нефизические состояния "духи"

   Они присутствуют в гравитационном излучении.

   Отсюда делался вывод о $m_g = 0$

В РТГ, используя принцип причинности, можно показать, что "духовых"состояний в гравитационной волне при $m_g \neq 0$ не возникает

Для слабого поля

$$\begin{aligned}\Box\Phi^{\mu\nu} + m^2\Phi^{\mu\nu} &= 0,\\ \partial_\nu\Phi^{\mu\nu} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{\mu\nu} &= a^{\mu\nu}(x)\cos kx\\ k &= (\omega, 0, 0, -q\omega) \qquad q^2 = 1 - m^2/\omega^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\nu} - \Phi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\Phi\\ g^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\nu} + \Phi^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\Phi\end{aligned}$$

Кривизна эффективного Риманова пространства

$$R = \frac{1}{2}m^2\Phi$$

В инерциальной системе пространства Минковского

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - d\mathbf{r}^2$$

В РТГ Риманово пространство — эффективное. Поэтому конус причинности Риманова пространства не может выходить за пределы конуса в пространстве Минковского

Конус причинности Риманова пространства определяется характеристиками

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} \;=\; 0$$

(члены с высшими производными)

Времениподобные геодкзические линии

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} \;&=\; 0 \\ g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \;&\geq\; 0; \qquad p^\alpha = g^{\alpha\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

Необходимое и достаточное условие в пространстве Минковского

$$\gamma_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \;\geq\; 0$$

Условия причинности

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu &\geq 0 \\
\gamma_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} p_\mu p_\nu &\geq 0 \\
p_\nu &= \frac{\partial S}{\partial x^\nu}
\end{aligned}
$$

непосредственно связаны с гиперболическими уравнениями гравитационного поля

$$
\left(\gamma^{\mu\nu} + \Phi^{\mu\nu}\right) p_\mu p_\nu \geq 0 \tag{1}
$$

$$
\gamma_{\alpha\beta} \left(\gamma^{\alpha\mu} + \Phi^{\alpha\mu}\right) \left(\gamma^{\beta\nu} + \Phi^{\beta\nu}\right) p_\mu p_\nu \geq 0 \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{p_3}{p_0} \\
x_1 &\leq x \leq x_2 \\
x_1 &= \Phi^{03} - 1 - \frac{1}{2}\left(\Phi^{00} + \Phi^{33}\right) \\
x_2 &= \Phi^{03} + 1 + \frac{1}{2}\left(\Phi^{00} + \Phi^{33}\right)
\end{aligned}
$$

Неравенство (2)

$$
\begin{aligned}
x'_1 &\leq x \leq x'_2 \\
x'_1 &= 2\Phi^{03} - 1 - \Phi^{00} - \Phi^{33} \\
x'_2 &= 2\Phi^{03} + 1 + \Phi^{00} + \Phi^{33}
\end{aligned}
$$

Условие

$$
\begin{aligned}
x'_1 \leq x_1 & \qquad x'_2 \geq x_1 \\
\Phi^{00} \pm 2\Phi^{03} + \Phi^{33} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Для волны (при условии $\partial_\mu \Phi^{\mu\nu}$)

$$
\begin{aligned}
\Phi^{99} &= q\Phi^{03}; \qquad \Phi^{03} = q\Phi^{33} \\
(q \pm 1)^2 \Phi^{03} &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$\Phi^{03} \quad = \quad 0$$

$$\Phi^{00} = 0 \qquad\qquad \Phi^{33} = 0$$

В РТГ <u>тензор</u>

$$t_g^{\epsilon\lambda} \;=\; \frac{1}{32\pi}\gamma^{\epsilon\alpha}\gamma^{\lambda\beta}\left(\partial_\alpha \Phi_\nu^\tau \partial_\beta \Phi^\nu \tau - \frac{1}{2}\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi\right)$$

$$a^{10} \;=\; qa^{13}, \qquad a^{20} = qa^{23}$$

$$t_g^{03} \;=\; \frac{1}{32\pi} q\omega^2 \left\{(a_1^2)^2 + \frac{1}{4}(a_1^1 - a_2^2)^2 + \frac{m^2}{\omega^2}\left[(a_3^1)^2 + (a_3^2)^2\right]\right\}$$

Отсутствуют продольно-продольные компоненты

В сферически симметричном случае излучение не происходит