Вариационный метод релятивистской задачи трех тел

А.Ф. Крутов, М.Ю. Кудинов, Н.А. Цирова

24 декабря 2008

Вариационный метод в релятивистской квантовой механики

Полного набора коммутирующих операторов:

$$\hat{M}_I, \hat{J}^2, \hat{J}_3, \hat{\vec{P}} \ . \tag{1}$$

В мгновенной форме динамики операторы $\hat{J}^2$, $\hat{J}_3$, $\hat{\vec{P}}$ совпадают с соответствующими операторами системы без взаимодействия, поэтому их диагонализация сводится к выбору подходящего базиса.

$$\hat{M}_I = \hat{M}_0 + \hat{V} \ , \tag{2}$$

где $\hat{M}_0$ - оператор инвариантной массы системы без взаимодействия, $\hat{V}$ - оператор взаимодействия.

Условия налагаемые на оператор массы:

$$\hat{M}_I = \hat{M}_0^+, \hat{M}_I > 0; \tag{3}$$

$$[\hat{\vec{P}}, \hat{V}] = [\hat{\vec{J}}, \hat{V}] = [\hat{\vec{\nabla}}_P, \hat{V}] = 0. \tag{4}$$

$$\hat{M}_I|\psi(1,2,3)\rangle \equiv (\hat{M}_0 + \hat{V})|\psi(1,2,3)\rangle = \lambda|\psi(1,2,3)\rangle. \tag{5}$$

где λ - собственное значение оператора массы.

$$|\psi(1,2,3)\rangle = \sum_{\mu} C_\mu|\psi_\mu\rangle, \tag{6}$$

где $|\psi_\mu\rangle$ - подходящий набор пробных векторов, μ - мультииндекс суммирования, C_μ - параметр варьирования.

$$\delta_c\langle\psi(1,2,3)|\hat{M}_I|\psi(1,2,3)\rangle = 0. \tag{7}$$

$$\sum_{\mu'}\langle\psi_\mu|\hat{M}_I|\psi_{\mu'}\rangle C_{\mu'} = 0. \tag{8}$$

Построение базиса

$$|\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2; \vec{p}_3, m_3\rangle = |\vec{p}_1, m_1\rangle \otimes |\vec{p}_2, m_2\rangle \otimes |\vec{p}_3, m_3\rangle \ , \tag{9}$$

$$\langle \vec{p}_1\,', m_1'; \vec{p}_2\,', m_2'; \vec{p}_3\,', m_3'|\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2; \vec{p}_3, m_3\rangle =$$
$$= 2p_{10}2p_{20}2p_{30}\delta(\vec{p}_1 - \vec{p}\,'_1)\delta(\vec{p}_2 - \vec{p}\,'_2)\delta(\vec{p}_3 - \vec{p}\,'_3)\delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}\delta_{m_3 m_3'}. \tag{10}$$

$$|\vec{P}; \vec{k}_1, \vec{k}_2, m_1, m_2, m_3\rangle, \tag{11}$$

$$\langle \vec{P}', \vec{k}_1', \vec{k}_2', m_1', m_2', m_3'|\vec{P}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, m_1, m_2, m_3\rangle =$$
$$= N_1^2 2P_0\delta(\vec{P} - \vec{P}')2\mu_1(k_1)\delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_1')2\mu_2(k_2)\delta(\vec{k}_2 - \vec{k}_2')\delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}\delta_{m_3 m_3'}, \tag{12}$$

$\mu_i(k_i)$ - релятивистские приведенные массы двух частиц:

$$\mu(k) = \frac{\tilde{p}_{i0}\tilde{p}_{j0}}{\tilde{p}_{i0} + \tilde{p}_{j0}} = \frac{\tilde{p}_{i0}\tilde{p}_{j0}}{M} \ . \tag{13}$$

$$|\vec{P}, m_J; k_1, k_2, L, S, J, (L, S, J)_2\rangle \ . \tag{14}$$

$$\langle \vec{P}', m'_J; k'_1, k'_2, L', S', J', (L', S', J')_2 | \vec{P}, m_J; k_1, k_2, L, S, J, (L, S, J)_2\rangle =$$
$$= N_1^2 2P_0 \delta(\vec{P} - \vec{P}') 2\mu_1(k_1) \frac{1}{k_1^2} \delta(k_1 - k'_1) 2\mu_2(k_2) \frac{1}{k_2^2} \delta(k_2 - k'_2)$$
$$\delta_{m_J m'_J} \delta_{S' S} \delta_{L' L} \delta_{L'_2 L_2} \delta_{S'_2 S_2} \delta_{J' J} \delta_{J'_2 J_2} \ . \tag{15}$$

$$|\vec{P}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, m_1, m_2, m_3\rangle = U(L_P) |\vec{k}_1, \vec{k}_2, m_1, m_2, m_3\rangle =$$
$$N_1 \sum_{m'_1, m'_2, m'_3} |\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2; \vec{p}_3, m_3\rangle D^{s_1}_{m_1' m_1}(Pp_1) D^{s_2}_{m_2' m_2}(Pp_2) D^{s_3}_{m_3' m_3}(Pp_3) \ . \tag{16}$$

$$
|\vec{P}, m_J; k_1, k_2, L, S, J, (L,S,J)_2\rangle =
$$

$$
N_1 \sum \int d\hat{k}_1 d\hat{k}_2 |\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2; \vec{p}_3, m_3\rangle Y_{Lm_L}(\hat{k}_1) Y_{L_2 m_{L_2}}(\hat{k}_2)
$$

$$
\langle \frac{1}{2}\frac{1}{2}\tilde{m}_2\tilde{m}_3 | S_2 m_{S_2}\rangle \langle S_2 L_2 m_{S_2} m_{L_2} | J_2 m_{J_2}\rangle \langle \frac{1}{2} J_2 \tilde{m}_1 \tilde{m}_{J_2} | S m_S\rangle
$$

$$
\langle S L m_S m_L | J m_J\rangle D^{\frac{1}{2}}_{m_1{}' m_1}(P p_1) D^{\frac{1}{2}}_{m_2{}' m_2}(P p_2) D^{\frac{1}{2}}_{m_3{}' m_3}(P p_3)\ . \qquad (17)
$$

Векторы $|\vec{P}, m_J; k_1, k_2, L, S, J, (L,S,J)_2\rangle$ по своим свойствам полностью аналогичны векторам свободной частицы с импульсом $\vec{P}$ и спином $\vec{J}$. В частности, под действием оператора $U(\Lambda)$ они ведут себя как векторы свободной частицы:

$$
|\vec{P}, m_J; k_1, k_2, L, S, J, (L,S,J)_2\rangle =
$$

$$
= \sum_{m_J} |\Lambda\vec{P}, m'_J; k_1, k_2, L, S, J, (L,S,J)_2\rangle D^J_{m'_J m_J}(\Lambda P, P)\ . \qquad (18)
$$

Волновую функцию системы трех взаимодействующих частиц можно записать в виде:

$$\langle \vec{P}, m_J; k_1, k_2, L, S, J, (L, S, J)_2 | \vec{p}_c, \mu_c \rangle =$$

$$N_c\, \delta(\vec{P} - \vec{p}_c) \delta_{m_J m_c} \varphi^J_\gamma(k_1, k_2) \ , \qquad (19)$$

где $\gamma \equiv \{L, S, (L, S, J)_2\}$, N_c - нормировочный множитель.

Нуклон в составной кварковой модели

$$V(r) = \int \rho(\vec{r}-\vec{r}\,')V(r')d\vec{r}\,', \quad \rho(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\sigma^3}{\pi^{\frac{3}{2}}}\exp[\sigma^2(\vec{r}-\vec{r}\,')^2]\,, \tag{20}$$

$$V(r) = -\sum_{k=1}^{3}\frac{4\alpha_k}{3r}\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\nu_k^2\sigma^2}{\nu_k^2+\sigma^2}}r\right) + \eta r\left[\frac{\exp(-\sigma^2 r^2)}{\sqrt{\pi}\sigma r} + \left(1+\frac{1}{\sigma^2 r^2}\right)\mathrm{erf}(\sigma r)\right] + \Lambda - \frac{32\sigma^3(\vec{S}_i\vec{S}_j)}{9\sqrt{\pi}m^2}\exp(-\sigma^2 r^2)\sum_{k=1}^{3}\alpha_k \mathrm{erf}(\nu_k\, r). \tag{21}$$

$$\alpha_1 = 0.432; \quad \alpha_2 = 0.131; \quad \alpha_3 = 0.117\,,$$
$$\nu_1 = 0.651\,\mathrm{GeV}^2; \quad \nu_2 = 187.140\,\mathrm{GeV}^2; \quad \nu_3 = 5.456\,\mathrm{GeV}^2\,. \tag{22}$$

$$\lambda = \langle \psi'_c | \hat{M}_I | \psi_c \rangle = \langle \psi'_c | \hat{M}_0 | \psi_c \rangle + \langle \psi'_c | \hat{V} | \psi_c \rangle \;. \tag{23}$$

$$\langle \psi'_c | \hat{M}_0 | \psi_c \rangle =$$

$$N_c^2 \Sigma \int k_1^2 k_2^2 dk_1 dk_2 \left| \varphi_\gamma^{J_c}(k_1, k_2) \right|^2 \left[\sqrt{k_1^2 + 4(k_2^2 + m^2)} + \sqrt{k_1^2 + m^2} \right] \;. \tag{24}$$

$$\langle \psi_c | V | \psi_c \rangle = \int x_1^2 dx_1 \, x_2^2 dx_2 \left| \varphi_\gamma^{J_c}(x_1, x_2) \right|^2 V(x_2) \;. \tag{25}$$

В качестве пробных функций будем использовать следующий набор:

$$\varphi_{\gamma\, l}^{J_c}(x_1, x_2) = \exp[\xi_l(x_1^2 + x_2^2)] x_1 x_2, \quad \xi_l = \beta + \rho(l - 1) \;. \tag{26}$$

$$\varphi_\gamma^{J_c}(k_1, k_2) = \sum_l C_l \varphi_{\gamma, l}^{J_c}(k_1, k_2) \;. \tag{27}$$

$$\langle \varphi_l' | \hat{M}_0 | \varphi_l \rangle =$$

$$\Big(\frac{\sqrt{\xi_l}\sqrt{\xi_l'}e^{\frac{m^2}{8}(\frac{1}{\xi_l+\xi_l'})}m^2\pi^{\frac{5}{2}}K_1(\frac{m^2}{8}(\frac{1}{\xi_l+\xi_l'}))}{8(\xi_l+\xi_l')^2\sqrt{\frac{1}{\xi_l}+\frac{1}{\xi_l'}}}\Big)+\Big(\frac{1}{512}[16\pi^{\frac{3}{2}}(\frac{(\xi_l+\xi_l')^2m^4}{4\xi_l^2\xi_l'^2}-$$

$$-\frac{3(\xi_l+\xi_l')m^2}{\xi_l\xi_l'}+15)+\sqrt{2}e^{-\frac{(\xi_l+\xi_l')m^2}{4\xi_l\xi_l'}}\pi(\sqrt{\frac{(\xi_l+\xi_l')m^2}{\xi_l\xi_l'}}(\frac{(\xi_l+\xi_l')m^2}{2\xi_l\xi_l'}-15)+$$

$$+e^{\frac{(\xi_l+\xi_l')m^2}{4\xi_l\xi_l'}}(\frac{(\xi_l+\xi_l')^2m^4}{4\xi_l^2\xi_l'^2}-\frac{3(\xi_l+\xi_l')m^2}{\xi_l\xi_l'}+15)\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\xi_l+\xi_l')m^2}{\xi_l\xi_l'}}))+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-\frac{(\xi_l+\xi_l')m^2}{4\xi_l\xi_l'}}}(3\sqrt{2}e^{-\frac{(\xi_l+\xi_l')m^2}{4\xi_l\xi_l'}}\sqrt{\frac{(\xi_l+\xi_l')m^2}{\xi_l\xi_l'}}(\sqrt{-\frac{(\xi_l+\xi_l')m^2}{\xi_l\xi_l'}}$$

$$\frac{(\xi_l+\xi_l')^2m^4}{4\xi_l^2\xi_l'^2}-\frac{3(\xi_l+\xi_l')m^2}{\xi_l\xi_l'}+15)\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(\xi_l+\xi_l')m^2}{\xi_l\xi_l'}}))]\,, \tag{28}$$

$$\langle\varphi_l'|\hat{V}|\varphi_l\rangle =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4(\xi_l+\xi_l')^{\frac{3}{2}}}\Big(-\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\tau_k\alpha_k}{2(\xi_l+\xi_l')\sqrt{\tau_k+\xi_l+\xi_l'}}+\frac{1}{4}\Big(\frac{\sigma(2\sigma^2+3\xi_l+3\xi_l')\eta}{(\xi_l+\xi_l')^{\frac{7}{2}}(\frac{\sigma^2+\xi_l+\xi_l'}{\xi_l+\xi_l'})^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{2^{1-\sigma^2}\sigma\eta}{(\xi_l+\xi_l')\sqrt{\sigma^2+\xi_l+\xi_l'}}+\frac{\eta}{\sigma(\sigma^2+\xi_l+\xi_l')^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{\pi}\Lambda}{(\xi_l+\xi_l')^{\frac{3}{2}}}\Big)-\frac{32(\vec{S}_i\vec{S}_j)\sigma^2}{9m^2\sqrt{\pi}}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\frac{\tan^{-1}(\frac{\nu_k}{\sqrt{\sigma^2+\xi_l+\xi_l'}})}{(\sigma^2+\xi_l+\xi_l')^{\frac{3}{2}}}+\frac{\nu_k}{(\sigma^2+\xi_l+\xi_l')(\sigma^2+\nu_k^2+\xi_l+\xi_l')}}{2\sqrt{\pi}}\Big)\,, \qquad (29)$$

где erf(x) – функция ошибок, $\tau_k=\sqrt{\sigma^2\nu_k^2/(\sigma^2+\nu_k^2)}$.

В таблице 1 в качестве примера приведены значения коэффициентов C_l при различных значений параметра пробной функции β.

Таблица: Значения коэффициентов в выражении (26) при $\sigma = 1$.

C_i	$\beta = 1$	$\beta = 0.8$	$\beta = 1.2$
C_1	-5.58716	-1.7563	-11.5321
C_2	92.9943	31.781	208.678
C_3	-894.446	-304.483	-1999.27
C_4	5039.8	1683.02	11050.9
C_5	-17430.7	-5700.57	-37430.7
C_6	38050.4	12203	80126.7
C_7	-52527.7	-16552.	-108682.
C_8	44423.3	13780.3	90483.2
C_9	-20988.9	-6420.47	-42157.7
C_{10}	4240.79	1281.13	8412.09

Проведем сравнение волновых функций с различным числом слагаемых в (26). Для этого введем величину $\theta(l,m)$, характеризующую различие функций:

$$\theta(l,m) = \int dk_1 dk_2 (\varphi_\gamma^{J_c}(k_1,k_2;l) - \varphi_\gamma^{J_c}(k_1,k_2;m))^2, \qquad (30)$$

где l, m - число слагаемых в волновой функции. Для $l = 6, m = 10$ при $\beta = 1$ и $\sigma = 1$ значение $\theta(6,10) = 0.00256476$, что говорит о том, что данная вариационная процедура хорошо восстанавливает волновую функцию при малом числе вариационных параметров.

Заключение

В работе развит вариационный метод для случая релятивистских трехчастичных составных систем. Процедура реализована в пакете символьных вычислений *Mathematica*. В качестве примера произведено вычисление волновых функций нуклона в релятивистской модели составных кварков.