Определение парциальных неупругостей упругого πN-рассеяния с помощью экспериментальных данных процессов $\pi N \to \pi\pi N$ в области импульсов $300 < P_{beam} < 500$ МэВ/с

Кожевников В. А.
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Шерман С. Г.
Петербургский институт ядерной физики РАН

В стандартном фазовом анализе единственной связью η с неупругими каналами, которую можно использовать при определении неупругостей, - это включение в экспериментальную базу суммы полных сечений всех неупругих процессов:

$$\sigma_{tot}^{inel} = \pi \left(\frac{\lambda_\pi}{k} \right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(1-(\eta_{l+})^2) + l(1-(\eta_{l-})^2]$$

(1)

Здесь $k=p_{cms}/m_\pi$ - импульс частиц в с.ц.и. в единицах массы π-мезона, а λ_π - комптоновская длина волны π-мезона ($\lambda_\pi=1/p_{cms}$).

Но это будет всего лишь одна точка среди сотен точек из упругих спектров, и ее влияние на общий χ^2 будет ничтожно.

Если же иметь аналитическое выражение для амплитуды неупругого процесса, то соотношение унитарности дает возможность вычислить все η.

Подробный вывод необходимых для этого формул приведен в

В.А. Кожевников, С.Г. Шерман, Препринт N 2734, ПИЯФ (Гатчина, 2007)

Используемая нами амплитуда описана в

A.A. Bolokhov, M.V. Polyakov and S.G. Sherman, Eur. Phys. J. A1, 317 (1998)

Соотношение унитарности для амплитуды упругого рассеяния f имеет вид:

$$\left\langle \mathrm{n}_f \lambda_f \right| f \left| \mathrm{n}_i \lambda_i \right\rangle - \left\langle \mathrm{n}_i \lambda_i \right| f \left| \mathrm{n}_f \lambda_f \right\rangle^* = iU_2 + iU_{inel}$$

где

$$U_2 = \frac{(2\pi)^4}{8\pi\sqrt{s}} \int \sum \left\langle \mathrm{n}_f \lambda_f \right| A_{2f}^+ A_{2i} \left| \mathrm{n}_i \lambda_i \right\rangle d\Gamma_2$$

$$U_3 = \frac{(2\pi)^4}{8\pi\sqrt{s}} \int \sum \left\langle \mathrm{n}_f \lambda_f \right| A_{3f}^+ A_{3i} \left| \mathrm{n}_i \lambda_i \right\rangle d\Gamma_3$$

и

$$U_{inel} = U_3 + U_4 + \ldots$$

- сумма всех возможных неупругих процессов.

Амплитуда упругого рассеяния и соотношение унитарности для нее диагональны в моментном представлении с определенной четностью.
Поэтому для диагонализации соотношения унитарности надо с обеими частями произвести следующие действия:

1) Умножить на $d_{\lambda\lambda'}(\theta)/2$ и проинтегрировать от 0 до π по $\sin\theta d\theta$ в соответствии с правилом перехода в моментное спиральное представление из импульсного спирального:

$$f^{(j)}_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f^{(p)}_{\lambda\lambda'} d^{(j)}_{\lambda\lambda'}(\theta)\sin(\theta)d\theta$$

где θ - угол между $\mathbf{n}_f$ и $\mathbf{n}_i$.

2) Преобразовать к амплитуде перехода между состояниями с определенной четностью и моментом, т.е. произвести диагонализацию. Эта процедура выполняется с помощью унитарной матрицы V:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{diag}(M) = V \bullet M \bullet V$$

Для упругой амплитуды результаты этого действия имеют вид:

$$f^{(j)}_{+} = f^{(j)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - f^{(j)}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}},\ f^{(j)}_{-} = f^{(j)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + f^{(j)}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

Индексы “+” и “-“ означают не четность состояния, а правило, по которому надо вычислить орбитальный момент l: значок плюс означает, что l=j+1/2, а значок минус означает, что l=j-1/2.
Соответствие между нашими обозначениями и нотацией, принятой в фазовом анализе, таково:

$$f_{-}^{(\frac{1}{2})} \equiv S1,\ f_{+}^{(\frac{1}{2})} \equiv P1,\ f_{-}^{(\frac{3}{2})} \equiv P3$$

и т.д.

Параметризация этих диагональных элементов

$$f_{\pm}^{(j)} = \frac{\eta_{\pm}^{(j)} e^{2i\delta_{\pm}^{(j)}} - 1}{2ip_{cms}}$$

После диагонализации:

$$U_2^{(j)} = 2p \begin{pmatrix} \left| f_{-}^{(j)} \right|^2 & 0 \\ 0 & \left| f_{+}^{(j)} \right|^2 \end{pmatrix}$$

$$U_{inel}^{(j)} = 2p \begin{pmatrix} \left| U_{-inel}^{(j)} \right|^2 & 0 \\ 0 & \left| U_{+inel}^{(j)} \right|^2 \end{pmatrix}$$

В итоге соотношение унитарности сведется к бесконечному количеству простых уравнений:

$$\operatorname{Im} f^{(j)} = pf^{(j)+} f^{(j)} + \frac{1}{2} U_{inel}^{(j)}$$

Подставив сюда выражение для f, получим решение этих уравнений:

$$\eta_{\pm}^{(j)} = \sqrt{1 - 2p\sum_{k=3}^{\infty}(U_{\pm inel}^{(j)I}\ )_k}$$

В дальнейшем мы ограничимся трехчастичным промежуточным состоянием, поэтому из всех U_{inel} напишем явно лишь член U_3:

$$(U_3^{(j)I})_{nm} = \frac{1}{16\pi\sqrt{s}}\frac{1}{(2\pi)^5}V_{nf}\left[\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta d_{\lambda_f \lambda_i}^{(j)}(\theta)\times\right.$$

$$\times\int\frac{d^3k_1}{2E_1}\frac{d^3k_2}{2E_2}\frac{d^3k_3}{2E_3}\delta^4(P_i - k_1 - k_2 - k_3)\times$$

$$\times\sum\left\langle\lambda_f\left|A_{3f}^{I*}A_{3i}^{I}\right|\lambda_i\right\rangle\Big]_{fi}V_{im}$$

где f, i, m и n - индексы у 2x2 матриц. По f и i идет суммирование при умножении на матрицы V (обычное суммирование при умножении матриц – «строка на столбец».
Здесь появился индекс I, означающий полный изоспин системы. Для каждого значения I существует свое соотношение унитарности. По виду они совершенно аналогичны, но в каждом свои неупругие амплитуды, соответствующие заданному значению I.

Мы будем работать, оставаясь в пределах изотопической инвариантности.
Напишем соотношение унитарности для изотопических упругих амплитуд.
Соответственно и амплитуды процесса $\pi N \to \pi\pi N$ тоже напишем для изотопических каналов реакции.

Для реакции

$$\pi^a(k_1) + N_\alpha(p;\lambda_i) \to \pi^b(k_2) + \pi^c(k_3) + N_\beta(q;\lambda_f)$$

воспользуемся следующей изотопически-инвариантной формой записи амплитуды:

$$(A_3)^{abc}_{\beta\alpha}(\lambda_f;\lambda_i) = \overline{u}(q;\lambda_f)(\widehat{A}_3)^{abc}_{\beta\alpha}(i\gamma^5)u(p;\lambda_i)$$

где a,b,c=1,2,3 и α,β=1,2 - изотопические индексы пионов и нуклонов, соответственно, λ_i, λ_f - поляризации начальных (конечных) нуклонов, и операторная часть имеет вид:

$$(\widehat{A}_3)^{abc}_{\beta\alpha} = \widehat{A}\tau^a_{\beta\alpha}\delta^{bc} + \widehat{B}\tau^b_{\beta\alpha}\delta^{ac} + \widehat{C}\tau^c_{\beta\alpha}\delta^{ab} + \widehat{D}i\varepsilon^{abc}\delta_{\beta\alpha}$$

Здесь A,B,C,D - изоскалярные функции кинематических переменных, τ - изоспиновые генераторы нуклонов.

Четыре возможные изотопические амплитуды выражаются через эти функции

$$B_{\frac{3}{2}2} = -\sqrt{\frac{5}{8}}(B + C),$$

$$B_{\frac{3}{2}1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-B + C + 4D),$$

$$B_{\frac{1}{2}1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B - C + 2D),$$

$$B_{\frac{1}{2}0} = \frac{1}{2}(3A + B + C)$$

Здесь первый индекс у функции B означает полный изоспин системы, а второй - полный изоспин двух конечных π-мезонов.

Так как амплитуды экспериментально наблюдаемых процессов πN ->ππN выражаются через эти же функции A,B,C,D:

$$(\widehat{A})_{\{\pi^+ p\to\pi^+\pi^+ n\}} = (\widehat{B}+\widehat{C})$$

$$(\widehat{A})_{\{\pi^+ p\to\pi^+\pi^0 p\}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\widehat{C}+2\widehat{D})$$

$$(\widehat{A})_{\{\pi^- p\to\pi^-\pi^0 p\}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\widehat{C}-2\widehat{D})$$

$$(\widehat{A})_{\{\pi^- p\to\pi^-\pi^+ n\}} = (\widehat{A}+\widehat{C})$$

$$(\widehat{A})_{\{\pi^- p\to\pi^0\pi^0 n\}} = \widehat{A}$$

то их можно найти из сравнения с измеренными сечениями и спектрами.

Через те же A,B,C,D выражаются все возможные каналы реакций πN ->ππN – еще три канала рассеяния π^0-мезона на протоне и восемь каналов при столкновении π-мезонов с нейтроном.

Итак, в соотношении унитарности диагональные члены матрицы, происходящей от процессов $\pi N \to \pi\pi N$, имеют вид:

$$(U_{3-}^{(j)\frac{3}{2}}) = \frac{1}{16\pi\sqrt{s}}\frac{1}{(2\pi)^5}\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int \frac{d^3k_1}{2E_1}\times$$

$$\times\frac{d^3k_2}{2E_2}\frac{d^3k_3}{2E_3}\delta^4(P_i-k_1-k_2-k_3)\left\{d^{(j)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\theta)\times\right.$$

$$\times\left[\left\langle\frac{1}{2}\right|B^*_{\frac{3}{2}2(f)}B_{\frac{3}{2}2(i)}\left|\frac{1}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{1}{2}\right|B^*_{\frac{3}{2}1(f)}B_{\frac{3}{2}1(i)}\left|\frac{1}{2}\right\rangle\right]+$$

$$+d^{(j)}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta)\left[\left\langle\frac{1}{2}\right|B^*_{\frac{3}{2}2(f)}B_{\frac{3}{2}2(i)}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle+\right.$$

$$\left.\left.+\left\langle\frac{1}{2}\right|B^*_{\frac{3}{2}1(f)}B_{\frac{3}{2}1(i)}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle\right]\right\}$$

$$(U_{3+}^{(j)\frac{3}{2}}) = \frac{1}{16\pi\sqrt{s}} \frac{1}{(2\pi)^5} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int \frac{d^3k_1}{2E_1} \times$$

$$\times \frac{d^3k_2}{2E_2} \frac{d^3k_3}{2E_3} \delta^4 (P_i - k_1 - k_2 - k_3) \left\{ d^{(j)}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\theta) \times \right.$$

$$\times \left[\left\langle \frac{1}{2} \left| B^*_{\frac{3}{2}2(f)} B_{\frac{3}{2}2(i)} \right| \frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \left| B^*_{\frac{3}{2}1(f)} B_{\frac{3}{2}1(i)} \right| \frac{1}{2} \right\rangle \right] -$$

$$+ d^{(j)}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta) \left[\left\langle \frac{1}{2} \left| B^*_{\frac{3}{2}2(f)} B_{\frac{3}{2}2(i)} \right| -\frac{1}{2} \right\rangle + \right.$$

$$\left. \left. + \left\langle \frac{1}{2} \left| B^*_{\frac{3}{2}1(f)} B_{\frac{3}{2}1(i)} \right| -\frac{1}{2} \right\rangle \right] \right\}$$

Выражения для I=1/2 записываются совершенно аналогично.

Для того чтобы вычислить эти подынтегральные выражения, надо знать, как устроены функции A, B, C, D.
Каждая из изоскалярных функций может быть разложена на независимые спинорные формфакторы:

$$\widehat{X} = S^X + 2V_R^X\ \hat{k}_R + 2V_I^X\ \hat{k}_I + T^X\left[\hat{k}_R, \hat{k}_I\right]$$

где

$$k_R = -k_1 - (k_2 + k_3)/2\ ,\quad k_I = \sqrt{3}(k_2 - k_3)/2$$

- кроссинг-ковариантные комплексные комбинации пионных импульсов.

Индекс X означает любой из спинорных формфакторов A, B, C, D.

S, V_R, V_I и T -- изотопические формфакторы, зависящие от пяти кинематических релятивистских инвариантов процесса. Мы пользуемся кроссинг-ковариантными релятивистскими инвариантами:

$$\tau=(p-q)^2\ ,\qquad \theta_R=(p-q)\cdot k_R\ ,$$

$$\theta_I=(p-q)\cdot k_I\ ,\qquad \nu_R=(p+q)\cdot k_R\ ,$$

$$\nu_I=(p+q)\cdot k_I$$

Тогда произведение изотопических амплитуд после преобразований можно записать в виде:

$$B_{3f}^{\lambda_f +} B_{3i}^{\lambda_i} = \begin{pmatrix} S \\ V_R \\ V_I \\ T \end{pmatrix}_f^+ G^{\lambda_f \lambda_i} \begin{pmatrix} S \\ V_R \\ V_I \\ T \end{pmatrix}_i$$

где

$$G^{\lambda_f \lambda_i} = \bar{u}^{\lambda_f} \begin{pmatrix} \hat{1} \\ -2\hat{k}_R \\ -2\hat{k}_I \\ -\left[\hat{k}_R, \hat{k}_I\right] \end{pmatrix}_f (\hat{q} - m) \begin{pmatrix} \hat{1} \\ -2\hat{k}_R \\ -2\hat{k}_I \\ \left[\hat{k}_R, \hat{k}_I\right] \end{pmatrix}_i^T u^{\lambda_i}$$

При вычислении конкретного изотопического вклада по этой формуле надо в качестве B_{IId} брать нужную сумму в соответствии с формулами выше:

$$S_{B_{\frac{3}{2}2}} = -\sqrt{\frac{5}{8}}(S^B + S^C)$$

$$S_{B_{\frac{3}{2}1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-S^B + S^C + 4S^D)$$

...

$$T_{B_{\frac{1}{2}0}} = \frac{1}{2}(3T^A + T^B + T^C)$$

У нас нет критерия, по которому мы могли бы предпочесть какие-либо из перечисленных решений, поэтому для всех этих решений вычислены парциальные неупругости для первых восьми парциальных волн для обоих изоспиновых состояний в интервале импульсов от порога до 0.600 ГэВ/с. Все решения дают примерно одинаковое поведение неупругостей в области до 0.500 ГэВ/с.

На рис. 1 ниже приведены результаты вычисления величин, определяющих неупругие парциальные сечения для первых восьми волн в обоих изоспиновых каналах.
Для каждой волны нарисованы линии, соответствующие всем 12 решениям. По толщине жгута можно судить о теоретической неопределенности полученных результатов.

Характерной особенностью является то, что P_{11}-волна дает неупругость, значительно превышающую неупругость во всех остальных волнах.

На этом же рис приведены значения неупругостей, полученныев фазовом анализе Арндта –
R.A. Arndt, W.J. Briscoe, I.I. Strakovsky and R.L.Workman, Phys. Rev. C **74**, 045205 (2006) [nucl-th/0605082].

Основной вклад в неупругие каналы дает волна P11 (как и у Арндта, наши значения скрыли линию Арндта). Похожи неупругости и в волне S11.
Зато две следующие по вкладу волны (P13 и P33) у нас больше, а D13 и D15 меньше. Качественные отличия наблюдаются в волнах S31 и P33 - у нас они монотонно растут с энергией, тогда как в решении Арндта они имеют структуру.

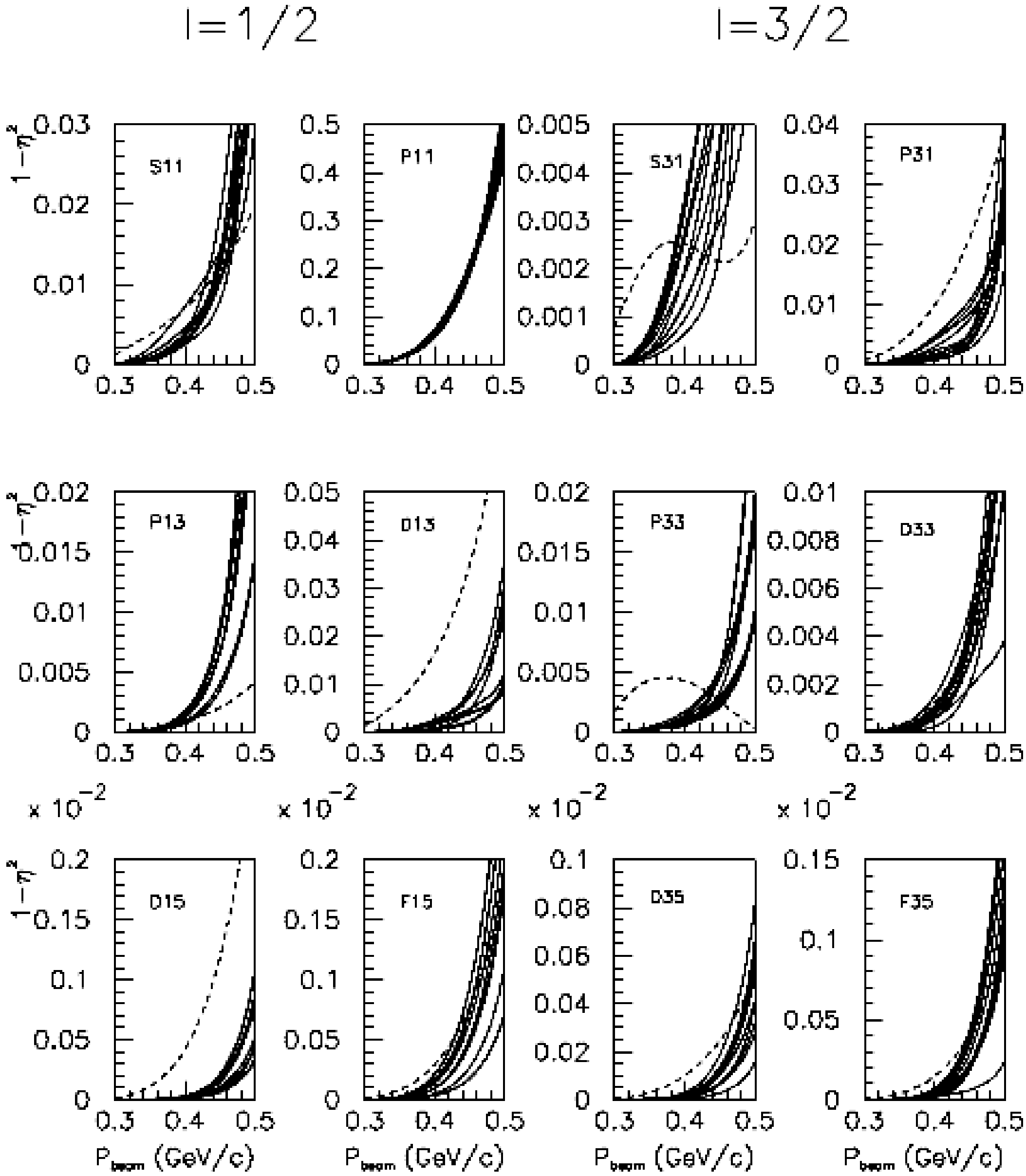

Рис. 1. Парциальные неупругости $(1-\eta^2)$ из решения Арндта (штриховые кривые) и наши решения (сплошные кривые).

Фазовый анализ упругого π^+p-рассеяния, учитывающий полные сечения неупругих каналов согласно соотношению (1)на сумму полных неупругих сечений выполнил Абаев в Петербургском институте ядерной физики.
Полученные им предварительные значения неупругостей вместе с нашими значениями и значениями Арндта приведены на рис. 2 ниже.
Видно, что правая часть этого соотношения насыщается у Абаева другими парциальными волнами по сравнению с настоящей работой.

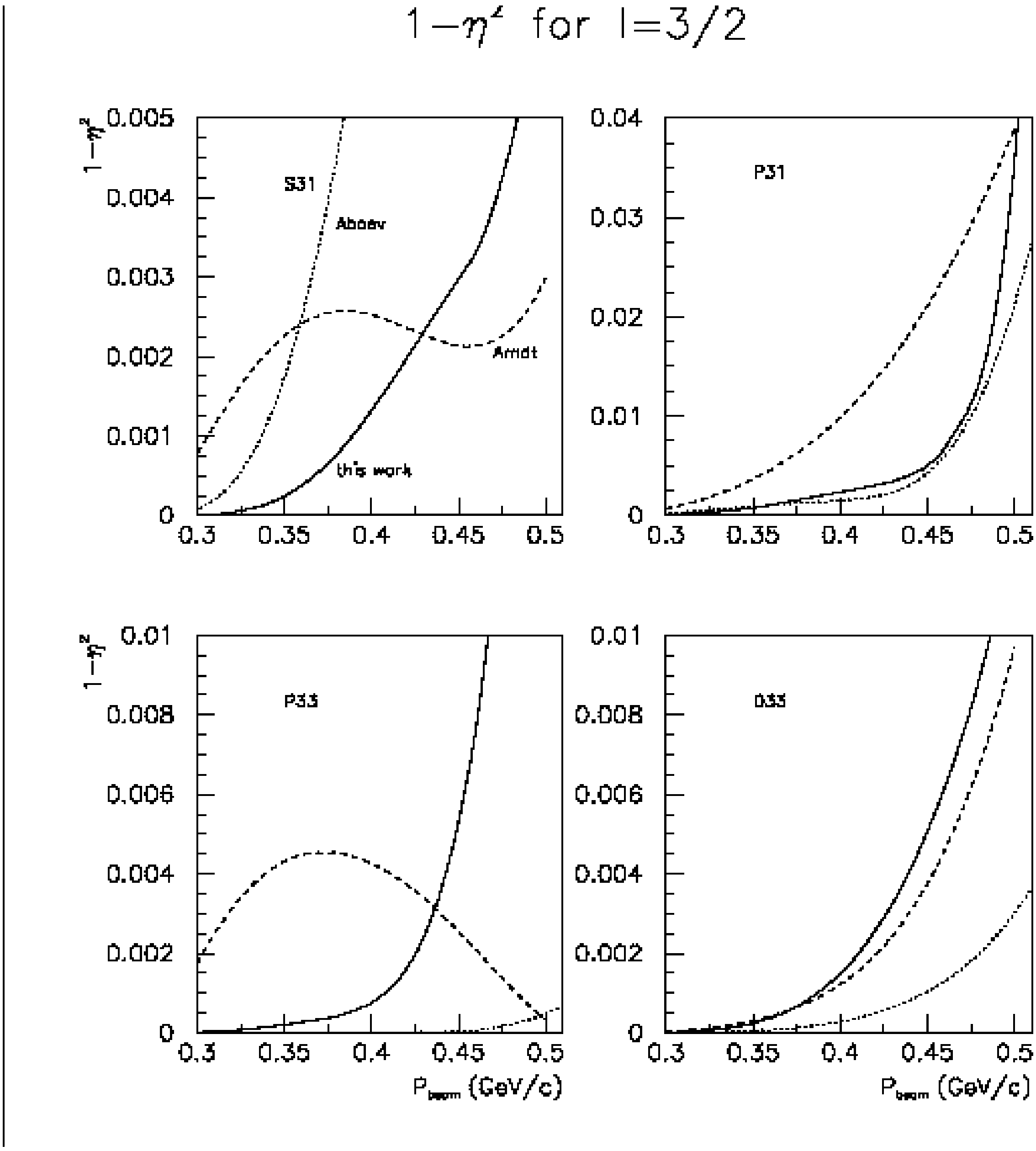

Рис. 2. Парциальные неупругости $(1-\eta^2)$ из решения Абаева (точки), Арндта (штрихи) и наши из первого решения (сплошные кривые).

Результаты наших вычислений можно проверить на самосогласованность.
С одной стороны, мы имеем амплитуды изотопических каналов реакции и, значит, можем вычислить соответствующие полные сечения:

$$\sigma_{\frac{3}{2}2} = \int |B_{\frac{3}{2}2}|^2 d\Gamma, \sigma_{\frac{3}{2}1} = \int |B_{\frac{3}{2}1}|^2 d\Gamma$$

$$\sigma_{\frac{1}{2}1} = \int |B_{\frac{1}{2}1}|^2 d\Gamma, \sigma_{\frac{1}{2}0} = \int |B_{\frac{1}{2}0}|^2 d\Gamma$$

Тогда полные неупругие сечения для состояний I=3/2 и I=1/2:

$$\sigma_{\frac{3}{2}} = \sigma_{\frac{3}{2}2} + \sigma_{\frac{3}{2}1}, \sigma_{\frac{1}{2}} = \sigma_{\frac{1}{2}1} + \sigma_{\frac{1}{2}0}$$

С другой стороны, мы можем вычислить эти же величины через определенные нами парциальные неупругости с помощью формулы (1) - напомним, что при определении неупругостей мы не использовали соотношение (1).

Соответствующие значения приведены в табл. 1 для I=3/2 (столбцы 3 и 4) и в табл. 2 для I=1/2 (столбцы 4 и 5). Второй столбец в этих таблицах показывает сумму экспериментальных сечений двух неупругих реакций $\pi^+ p \to \ldots$ и трех реакций $\pi^+ p \to \ldots$

Еще одна проверка - сравнение экспериментальных данных с величинами, которыми мы оперируем. Для этого надо воспользоваться связью между суммой полных сечений во всех каналах для каждого начального состояния πN-системы и изотопическими полными неупругими сечениями

$$\sigma_{\pi^+ p\to\pi^+\pi^+ n} + \sigma_{\pi^+ p\to\pi^+\pi^0 p} = \sigma_{\frac{3}{2}}$$

$$\sigma_{\pi^- p\to\pi^0\pi^0 n} + \sigma_{\pi^- p\to\pi^-\pi^0 p} + \sigma_{\pi^- p\to\pi^-\pi^+ n} = \frac{1}{3}\sigma_{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\sigma_{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_{\pi^0 p\to\pi^0\pi^0 p} + \sigma_{\pi^0 p\to\pi^-\pi^+ p} + \sigma_{\pi^0 p\to\pi^+\pi^0 n} = \frac{2}{3}\sigma_{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\sigma_{\frac{1}{2}}$$

В тех же таблицах соответствующие данные приведены в третьем столбце, они сравниваются со вторым столбцом.

Полученные числа не демонстрируют никаких существенных противоречий при $P_{beam} < 0.5$ ГэВ/с.
Для сравнения в последнем столбце таблиц приведены изотопические полные неупругие сечения, вычисленные по результатам фазового анализа Арндта, которые в начале таблиц значительно больше наших и экспериментальных.
В табл. 2 приведены аналогичные величины, полученные Абаевым для упругого π^+p рассеяния, которые гораздо лучше совпадают с экспериментом т.к. он учитывал вклад неупругих полных сечений по формуле 1.

P_{beam}, ГэВ/с	Сечение, мбн				
	Эксперимент $\pi^+p\to\ldots$	$\sigma_{3/2,2}+\sigma_{3/2,1}$	Настоящая работа	Арндт и др.	Абаев
			По неупругостям η		
0.30	0.0017	0.0014	0.0017	0.116	0.064
0.32	0.008	0.007	0.008	0.20	0.018
0.34	0.02	0.02	0.02	0.26	0.04
0.36	0.04	0.04	0.05	0.30	0.06
0.38	0.06	0.07	0.08	0.33	0.11
0.40	0.11	0.11	0.12	0.35	0.14
0.42	0.16	0.16	0.19	0.39	0.18
0.44	0.23	0.26	0.30	0.43	0.23
0.46	0.34	0.43	0.48	0.50	0.29
0.48	0.51	0.73	0.80	0.58	0.38
0.50	0.7	1.28	1.38	0.69	0.52
0.52	0.9	2.27	2.38	0.83	0.69

Таблица 1. Сравнение экспериментальных неупругих полных сечений с нашими результатами и результатами фазовых анализов Арндта-2006 и Абаева-2007 при I=3/2. Импульсы приведены в ГэВ/с, сечения в миллибарнах.
Сечения в последних трех столбцах вычислены с помощью неупругостей η.

P_{beam}, ГэВ/с	Сечение, мбн				
	Эксперимент $\pi^- p \to \ldots$	$(1/3)\sigma_{1/2,1}+$ $+(2/3)\sigma_{1/2,0}$	$\sigma_{1/2,1}+\sigma_{1/2,0}$	Настоящая работа	Арндт и др.
				По неупругостям η	
0.30	0.01	0.01	0.017	0.018	0.13
0.32	0.05	0.05	0.07	0.076	0.28
0.34	0.22	0.13	0.19	0.20	0.47
0.36	0.32	0.27	0.39	0.40	0.72
0.38	0.50	0.48	0.69	0.71	1.06
0.40	0.79	0.78	1.12	1.15	1.53
0.42	1.12	1.18	1.69	1.73	2.16
0.44	1.68	1.6	2.40	2.46	2.99
0.46	2.37	2.31	3.26	3.41	4.05
0.48	3.2	3.13	4.33	4.63	5.28
0.50	4.1	4.23	5.71	6.31	6.61
0.52	4.7	5.86	7.90	8.81	7.90

Таблица 2. То же, что в Таблице 1, но для I=1/2

Заключение

Мы получили формулы, связывающие изотопические формфакторы амплитуды процесса $\pi N \to \pi\pi N$ с амплитудами этого процесса в чистых изотопических состояниях.

Затем мы воспользовались тем, что изотопические формфакторы можно определить из эксперимента, если измерить полные сечения и много разных спектров во всех зарядовых каналах этой реакции.

И, наконец, мы вычислили параметры неупругости парциальной амплитуды упругого πN-рассеяния в области энергий, где нет никаких открытых неупругих каналов, кроме $\pi N \to \pi\pi N$.

Результаты наших вычислений показали, что стандартные фазовые анализы хорошо определяют лишь самую большую неупругость, которая оказывается в волне P11. В остальных волнах имеется различие как количественное, так и качественное.

При этом наши результаты отлично проходят проверку на самосогласованность при вычислении полных неупругих сечений через определенные нами параметры неупругости.